



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală – Brașov - CLASA a V-a

Problema 1

La numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au folosit 2460 de cifre. Câte pagini are această enciclopedie?

Problema 2

- Aflați restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 257 + 235$ la 231.
- Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 9 dau restul egal cu o treime din cât.

Problema 3

Determinați suma numerelor de formă \overline{abcd} în care $a = \frac{d}{5}$ și \overline{ab} este egal cu o cincime din \overline{cd} .

Problema 4

Arătați că numărul $a = 5 \cdot (n+1) + 6^{2025} + 1001^{n+1} + 5$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a V-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1 (7p)

La numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au folosit 2460 de cifre. Câte pagini are această enciclopedie?

Barem

$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 = 189$ -cifre folosite la numerotarea paginilor cu o cifră și respectiv cu două cifre.....1p
 $2460 - 189 = 2271$ -cifre rămase.....1p
 $2271 : 3 = 757$ - pagini numerotate cu trei cifre.....2p
Deci enciclopedia are 856 de pagini.....3p

Problema 2 (7p)

- a) (3p) Aflați restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 257 + 235$ la 231.
b) (4p) Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 9 dău restul egal cu o treime din cât.

Barem

a) $235 : 231 = 1$ rest 4.....1p
 $n = 231 \cdot A + 4$, deci restul este 4.....2p
b) $n = 9 \cdot 3r + r, r < 9$ 2p
 $n = 0, 28, 56, 84, 112, 140, 168, 196, 224$ 1p
suma numerelor este 1008.....1p

Problema 3 (7p)

Determinați suma numerelor de formă \overline{abcd} în care $a = \frac{d}{5}$ și \overline{ab} este egal cu o cincime din \overline{cd} .

Barem

Din $a = \frac{d}{5}$ avem $d = 5a$, de unde $a = 1$ și $d = 5$ 2p

Din $\overline{cd} = 5 \cdot \overline{ab}$ avem $10c + 5 = 50 + 5b$, de unde $2c = 9 + b$2p

Deoarece $2c \geq 9$ avem $c \geq 5$ 1p

Se obțin numerele 1155, 1365, 1575, 1785, 1995 cu suma 78752p

Problema 4 (7p)

Arătați că numărul $a = 5 \cdot (n+1) + 6^{2025} + 1001^{n+1} + 5$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Barem

$u(1001^{n+1}) = 1$ 1p

Pentru n -număr natural par $u(5(n+1))=5 \Rightarrow u(a)=7$ 2p

Pentru n -număr natural impar $u(5(n+1))=0 \Rightarrow u(a)=2$ 2p

7 și 2 nu pot fi ultimele cifre ale unui patrat perfect, deci a nu este patrat perfect.....1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală – Brașov - CLASA a VI-a

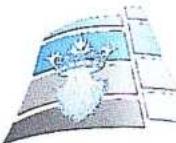
- 1) Să se determine mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:
 - a) $A \cup B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ și } (3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025\}$
 - b) $A \cap B = \{x / x \in \mathbb{N}^* \text{ și } (1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25\}$
 - c) $A \setminus B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ este cel mai mare divizor propriu al lui } 8\}.$
- 2) Se consideră numerele naturale nenule x și y.
 - a) Știind că 40% din primul număr este egal cu 60% din al doilea număr, demonstrați că numerele sunt direct proporționale cu 3 și 2.
 - b) Calculați cel mai mic multiplu comun al numerele x și y dacă acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), respectiv 0,5 și $7x - 5y = 121$.
- 3) Se consideră punctele coliniare A, O și B în această ordine. Se iau punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât unghiul AOC să fie ascuțit și semidreptele OC și OD să fie perpendiculare. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și DOB.
- 4) Punctele A, B, C, D, E sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și D sunt diametral opuse, $\bar{AB} = \frac{1}{3} \cdot \bar{AD}$, punctul C este mijlocul arcului BD, iar raportul măsurilor arcelor DE și EA este $\frac{1}{5}$.
 - a) Calculați măsurile arcelor AB, BC, CD, DE și EA.
 - b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB, demonstrați că punctele M, O și E sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a VI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1) Să se determine mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ și } (3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025\}$
- b) $A \cap B = \{x / x \in \mathbb{N}^* \text{ și } (1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25\}$
- c) $A \setminus B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ este cel mai mare divizor propriu al lui } 8\}$.

(7p)

Soluție:Din $(3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025$ obținem $3^x \leq 3^4$, de unde $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (2p)Din $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25$, avem $5^x \leq 5^2$, de unde $x \leq 2$ cu $x \in \mathbb{N}^*$, deci $A \cap B = \{1, 2\}$... (1p) $A \setminus B = \{4\}$ (1p)Obținem $A = \{1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ (3p)

2) Se consideră numerele naturale nenule x și y.

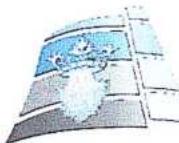
- a) Știind că 40% din primul număr este egal cu 60% din al doilea număr, demonstrați că numerele sunt direct proporționale cu 3 și 2. (2p)
- b) Calculați cel mai mic multiplu comun al numerele x și y dacă acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), respectiv 0,5 și $7x - 5y = 121$ (5p)

Soluție:a) $\frac{40}{100} \cdot x = \frac{60}{100} \cdot y \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, deci x și y sunt direct proporționale cu 3 și 2 (2p)b) Din $x \cdot 0,(3) = y \cdot 0,5$ avem $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k$, deci $x = 3k$ și $y = 2k$ (2p)înlocuind în $7x - 5y = 121$, obținem $k = 11$, deci $x = 33$ și $y = 22$ (2p)

iar c.m.m.m.c = 66 (1p)

3) Se consideră punctele coliniare A, O și B în această ordine. Se iau punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât unghiul AOC să fie ascuțit și semidreptele OC și OD să fie perpendiculare. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și DOB.

Soluție:Punctele coliniare A, O și B $\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ$ (1p) $OC \perp OD \Rightarrow \angle COD = 90^\circ$, $\angle AOC$ ascuțit \Rightarrow semidreapta OC este în interiorul $\angle AOD$... (1p) $\angle AOC + \angle DOB = 90^\circ$ (1p)



OE este bisectoarea $\angle AOC \Rightarrow \angle EOC = \angle AOC/2$ (1p)

OF este bisectoarea $\angle DOB \Rightarrow \angle DOF = \angle DOB/2$ (1p)

$\angle EOF = \angle EOC + \angle COD + \angle DOF = 90^\circ + (\angle AOC + \angle DOB)/2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ (2p)

- 4) Punctele A, B, C, D, E sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și D sunt diametral opuse, $\widehat{AB} = \frac{1}{3} \cdot \widehat{AD}$, punctul C este mijlocul arcului BD, iar raportul măsurilor arcelor DE și EA este $\frac{1}{5}$.

- a) Calculați măsurile arcelor AB, BC, CD, DE și EA. (5p)
b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB, demonstrați că punctele M, O și E sunt coliniare. (2p)

Soluție:

- a) punctele A și D diametral opuse $\Rightarrow \widehat{AD} = 180^\circ$, $\widehat{AB} = \frac{1}{3} \cdot \widehat{AD}$, deci $\widehat{AB} = 60^\circ$ (1p)
 $\widehat{BD} = 120^\circ$, $\widehat{BC} = \widehat{CD} = 60^\circ$ (1p)
 $\widehat{DE} = 30^\circ$, $\widehat{EA} = 150^\circ$ (1p)
- b) $\angle AOB$ este unghi la centru $\Rightarrow \angle AOB = \widehat{AB} = 60^\circ$ (1p)
semidreapta OM este bisectoarea $\angle AOB \Rightarrow \angle MOB = \widehat{MB} = 30^\circ$ (1p)
 $\angle MOE = \widehat{ME} = \widehat{MB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} = 180^\circ \Rightarrow$ punctele M, O și E sunt coliniare.....(2p)



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA**14 februarie 2025 - Etapa locală – Brașov - CLASA a VII-a****Problema 1**

- a) Aflați numărul natural n pentru care are loc egalitatea

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2025}{2026}$$

- b) Demonstrați că numărul A este divizibil cu 2025, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$ dacă

$$A = 3^{2n+5} \cdot 7^{n+1} + 63^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 7^n \cdot 87$$

Problema 2

Se consideră numerele :

$$x = 2\sqrt{6} \cdot |2 - \sqrt{6}| + \frac{\epsilon(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}} - 2\sqrt{(\sqrt{6}-6)^2}$$

$$y = 2\sqrt{6} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + |\sqrt{2} - 24| - 3|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$$

- a) Calculați valorile numerelor reale x și y .
b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor reale x și y .

Problema 3

În pătratul ABCD, punctul M este mijlocul segmentului AB. Dacă dreptele DM și AC se intersecțează în punctul P și aria triunghiului APD este 54 cm^2 , calculați aria și perimetru pătratului ABCD.

Problema 4

În triunghiul isoscel ABC cu măsura unghiului A de 120° , punctul M este mijlocul laturii AB. Perpendiculara din punctul M pe latura BC intersecțează dreapta AC în punctul D și dreapta AE este perpendiculară pe dreapta BC. Demonstrați că:

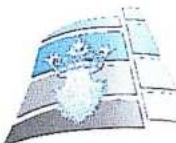
- a) Triunghiul DAM este echilateral;
b) Patrulaterul DAEM este romb;
c) $CD = 3 \cdot AD$.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a VII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

- a) Aflați numărul natural n pentru care are loc egalitatea: (3 p)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2025}{2026}$$

- b) Demonstrați că numărul A este divizibil cu 2025, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$ dacă

$$A = 3^{2n+5} \cdot 7^{n+1} + 63^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 7^n \cdot 87 \quad (4p)$$

Soluție:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2025}{2026} \quad (1p)$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{2025}{2026} \quad (1p)$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2025}{2026} \Rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{2025}{12026} \Rightarrow n = 2025 \quad (1p)$$

b) $A = 3^{2n+5} \cdot 7^{n+1} + 3^{2n+2} \cdot 7^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 7^n \cdot 87 \quad (1p)$
 $A = 3^{2n} \cdot 7^n (3^5 \cdot 7 + 3^2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 87) \quad (1p)$

$$A = 3^{2n} \cdot 7^n (1701 + 63 + 261) \quad (1p)$$

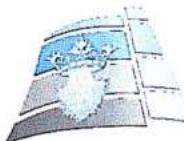
$$A = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 2025 \Rightarrow A \text{ este divizibil cu } 2025 \quad (1p)$$

Problema 2

Se consideră numerele :

$$x = 2\sqrt{6} \cdot |2 - \sqrt{6}| + \frac{6(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}} - 2\sqrt{(\sqrt{6}-6)^2}$$

$$y = 2\sqrt{6} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + |\sqrt{2} - 24| - 3|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$$



- a) Calculați valorile numerelor reale x și y . (4p)
 b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor reale x și y . (3p)

Soluție:

$$\text{a) } x = 2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{6} - 2) + \frac{6\sqrt{6}(\sqrt{6}+2)}{6} - 2(6 - \sqrt{6}) \quad (1p)$$

$$x = 12 - 4\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{6} - 12 + 2\sqrt{6} \quad (1p)$$

$$x=6$$

$$y = \left(\frac{5 \cdot 2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{3 \cdot 2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \right) + 24 - \sqrt{2} - 3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \quad (1p)$$

$$y = 10\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 24 - \sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} \quad (1p)$$

$$y = 24$$

$$\text{b) } m_a = \frac{x+y}{2} = \frac{6+24}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad (1p)$$

$$m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12 \quad (1p)$$

Problema 3

În pătratul ABCD, punctul M este mijlocul segmentului AB. Dacă dreptele DM și AC se intersecțează în punctul P și aria triunghiului APD este 54 cm^2 , calculați aria și perimetrul pătratului ABCD. (7p)

Soluție:

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. În triunghiul ABD, AD și AO sunt mediane,

deci $AO \cap DM = \{P\}$ = centrul de greutate al triunghiului ABD. (2p)

Avem $A(ABD) = 3 \cdot A(APD) = 3 \cdot 54 = 162 \text{ cm}^2$ (2p)

DB este diagonală pătratului ABCD $\Rightarrow A(ABD) = A(BCD) = 162 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow A(ABCD) = 2 \cdot 162 \text{ cm}^2 = 324 \text{ cm}^2$ (1p)

$A(ABCD) = l^2 \Rightarrow l^2 = 324 \Rightarrow l = 18 \text{ cm}$ (1p)

$P(ABCD) = 4 \cdot l = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}$ (1p)

**Problema 4**

În triunghiul isoscel ABC cu măsura unghiului A de 120° , punctul M este mijlocul laturii AB. Perpendiculara din punctul M pe latura BC intersectează dreapta AC în punctul D și dreapta AE este perpendiculară pe dreapta BC. Demonstrați că:

- a) Triunghiul DAM este echilateral;
- b) Patrulaterul DAEM este romb;
- c) $CD = 3 \cdot AD$.

Soluție:

a) În triunghiul isoscel ABC, AE este înălțime deci și bisectoarea unghiului BAC

$$\Rightarrow \angle CAE = \angle EAB = 60^{\circ}$$

Punctele D,A,C sunt coliniare $\Rightarrow \angle DAM = 180^{\circ} - 2 \cdot 60^{\circ} = 60^{\circ}$ (1p)

În triunghiul ABC, isoscel avem $\angle ABC = 30^{\circ}$. Cum MF \perp BC atunci $\angle BFM = 90^{\circ}$ (1p)

$\Rightarrow \angle BMF = 60^{\circ}$. Dar $\angle BMF = \angle DMA = 60^{\circ}$ fiind unghiuri opuse la vârf.

În consecință, triunghiul MAD este echilateral pentru că are 2 unghiuri cu măsura de 60° (1p)

b) În triunghiul AEC cu măsura unghiului AEC de 90° și măsura unghiului ACE de 30°

$$\Rightarrow \text{din teorema unghiului de } 30^{\circ} \text{ că } AE = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

Punctul M este mijlocul laturii AB $\Rightarrow AM = \frac{AB}{2}$, AB=AC (2) (1p)

din (1) și (2) $\Rightarrow AE = AM$ și cum unghiul MAE are măsura de 60°

\Rightarrow triunghiul MAE este echilateral $\Rightarrow MA = AE = ME$

La punctul a) am demonstrat că triunghiul MDA este echilateral $\Rightarrow MA = AD = MD$

$\Rightarrow DA = AE = ME = DA \Rightarrow DAEM$ este romb (1p)

c) La punctul b) am arătat că $AE = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \cdot AE$, dar $AE = AD \Rightarrow AC = 2 \cdot AD$

$$CD = AD + AC = AD + 2AD = 3 \cdot AD \quad (1p)$$